



دفترچه سوالات و پاسخ تسلی مرحله اول سال و پهارمین دوره المپیاد ریاضی سال ۱۴۰۰

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مسائلهای تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۱۸۰	-	۳۰

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

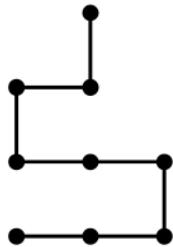
توضیحات مهم

تذکرات آزمون:

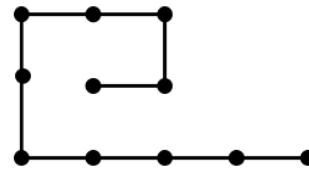
ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سوالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۳۰ سؤال چند گزینه‌ای** و وقت آن **۱۸۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز نیست.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

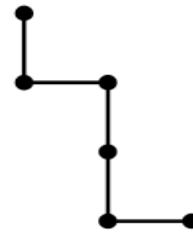
-۱) با کنار هم قرار دادن دو نسخه مشابه از کدام نوع سیم، می توان یک چند ضلعی بسته ساخت که خودش را قطع نکند و همه اضلاعش افقی و
يا عمودی باشد؟



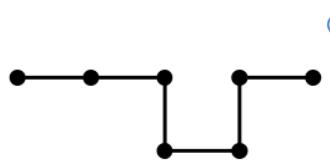
(۱)



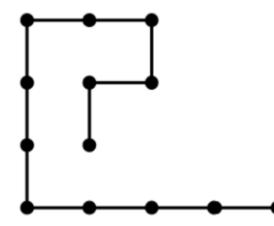
(۲)



(۳)



(۴)



(۵)

-۲) در مثلث ABC زاویه $\angle BAC = 60^\circ$ است. نقطه E درون ضلع AC و نقطه D روی امتداد ضلع BC از این مثلث به گونه ای
انتخاب شده اند که C بین B و D قرار دارد و به علاوه $\angle DEC = 30^\circ$. اگر $AB = DE$ باشد، نسبت $\frac{BC}{CD}$ چند است؟

۵

۴

۳

۲

۱

-۳) اعداد حقیقی a , b , c , و d در تساوی های $d + a = 5$, $b + c = 3$, $ab = 2$, $cd = 4$ صدق می کنند. چند مقدار ممکن برای a
وجود دارد؟

۵) بی نهایت

۴

۳

۲

۱) صفر

-۴) سه جفت پیچ و مهره کوچک، متوسط و بزرگ داریم که نمی دانیم کدام پیچ برای کدام مهره است. هر بار می توانیم یک پیچ و یک مهره را
باهم امتحان کنیم. کمترین تعداد امتحان های موردنیاز برای این که در هر صورت مهره نظری هر پیچ را بیابیم، برابر کدام گزینه است؟

۵

۴

۳

۲

۱

بهمن ۹۴

۲۴	۱۷	۱۰	۳	شنبه
۲۵	۱۸	۱۱	۴	یکشنبه
۲۶	۱۹	۱۲	۵	دوشنبه
۲۷	۲۰	۱۳	۶	سه شنبه
۲۸	۲۱	۱۴	۷	چهارشنبه
۲۹	۲۲	۱۵	۸	پنجشنبه
۳۰	۲۳	۱۶	۹	جمعه

-۵) به یک هفته در سال «جالب» می گوییم اگر دوشنبه آن هفته، روز دوم، دوازدهم یا
بیست و دوم ماه باشد. در فصل پاییز چند هفته ممکن است جالب باشد؟

۱) یک یا دو هفته

۲) یک یا سه هفته

۳) صفر یا سه هفته

۴) صفر، یک یا دو هفته

۵) در هر حالتی دقیقاً دو هفته



-۶ گلدانی به شکل مخروطی ناقص با ارتفاع ۲۰ سانتی‌متر و قطر دهانه و کف به ترتیب ۱۵ و ۱۰ سانتی‌متر روی زمین قرار گرفته است. توپی به شعاع ۷ سانتی‌متر را در این گلدان می‌اندازیم. ارتفاع بالاترین توب از سطح زمین (بر حسب سانتی‌متر) به کدام گزینه نزدیک‌تر است؟

۸ (۵)

۶ (۴)

۲۷۸ (۳)

۲۷۶ (۲)

۴ (۱)

-۷ در یک هتل ۱۳ اتاق وجود دارد که شماره اتاق‌ها از ۱ تا ۱۳ روی درب اتاق و روی کلید هر اتاق درج شده است. ولی کلید هر اتاق یکتا نیست و همه کلیدهایی که تفاضل شماره نوشته شده روی آن‌ها و شماره اتاق بر ۳ بخش‌پذیر باشد، درب اتاق را باز می‌کنند. به چند طریق می‌توان کلیدها را به اتاق‌ها نسبت داد تا درب همه اتاق‌ها قابل باز شدن باشند؟

۱۳! (۵)

$$\frac{4! \times (5!)^2}{3!} \quad (۴)$$

$$\frac{5! \times (4!)^2}{3!} \quad (۳)$$

$$4! \times (5!)^2 \quad (۲)$$

$$5! \times (4!)^2 \quad (۱)$$

۱ (۵)

۰/۵ (۴)

۰/۵ (۳)

-۰/۵ (۲)

-۱ (۱)

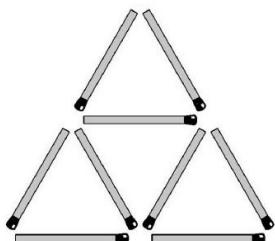
-۸ در ذوزنقه ABCD (AB||CD) نقطه‌های P، Q، R، S، T را به ترتیب وسط‌های AC، CD، BC، AB و

هستند. می‌دانیم نسبت مساحت مثلث PQR به مساحت مثلث PST برابر $\frac{۱۳۹۵}{۱۳۹۴}$ است. نسبت دو قاعده این ذوزنقه کدام است؟

۲۷۸۹ (۵)

۱۳۹۵ (۴)

۶۹۷ (۳)

 $\sqrt{۱۳۹۵}$ (۲) $\sqrt{۱۳۹۴}$ (۱)

-۹ به چند طریق می‌توان ۳ چوب‌کبریت از ۹ چوب‌کبریت موجود در شکل روبرو را حذف کرد که هیچ مثلثی در شکل باقی نماند؟

۱۸ (۳)

۹ (۲)

۸۰ (۵)

۶ (۱)

۲۷ (۴)

-۱۰ یک مستطیل با اضلاع ۳۰ و ۴۰ را با رسم خطوطی موازی اضلاع به شبکه‌ای ۴۰ × ۳۰ از مربع‌های واحد تبدیل کرده‌ایم. یکی از قطرهای مستطیل اولیه را در نظر بگیرید. دایره محاطی چند تا از مربع‌های واحد شبکه‌بندی به این قطر مماس هستند؟

۴۰ (۵)

۳۸ (۴)

۳۰ (۳)

۲۰ (۲)

۱۰ (۱)

- ۱۳ طول جهش‌های یک قورباغه می‌تواند هر یک از اعداد ... , 5^3 , 5^2 , 5 , ۱ باشد. این قورباغه روی نقطه صفر از محور اعداد صحیح نشسته و در هر مرحله می‌تواند به سمت راست یا چپ جهش کند. اگر این قورباغه نتواند دو جهش با طول مساوی انجام دهد، به چند تا از اعداد $\{1, 2, \dots, 1394\}$ می‌تواند برسد؟

۲۴۳ (۵)

۱۲۱ (۴)

۸۱ (۳)

۶۲ (۲)

۶۳ (۱)

$$\begin{cases} a^3 + bc = d^3 \\ b^3 + cd = a^3 \\ c^3 + da = b^3 \\ d^3 + ab = c^3 \end{cases}$$

-۱۴ چند چهارتایی مرتب (a, b, c, d) از اعداد حقیقی یافت می‌شود که در دستگاه معادلات روبرو صدق کند؟

۲۵ (۳)

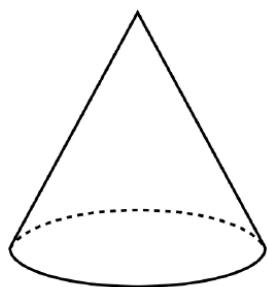
۵ (۲)

(۵) بی‌نهایت

۱ (۱)

۴۹ (۴)

- ۱۵ نقطه P در جسم A را «خاص» گوییم، اگر نقطه‌های متمايز X و Y در A وجود نداشته باشند که P نقطه وسط پاره خط XY باشد. کدام گزینه در مورد نقاط خاص یک مخروط توپر با قاعده دایره صحیح است؟



(۱) مخروط تنها یک نقطه خاص دارد.

(۲) هر خطی که وجه دایره‌ای مخروط را قطع کند، حتماً شامل یک نقطه خاص مخروط است.

(۳) هر صفحه‌ای که مخروط را قطع کند، حتماً شامل نقطه‌ای خاص از مخروط است.

(۴) همه نقطه‌های سطح جانبی مخروط، خاص هستند.

(۵) یک و فقط یک در فضا وجود دارد که همه نقاط خاص مخروط روی سطح آن قرار بگیرند.

- ۱۶ علی فرمولی برای چند جمله‌ای‌های درجه ۲ کشف کرده است که با کمک آن می‌تواند مقدار چندجمله‌ای درجه‌دوبی را در نقطه ۳ برحسب مقدار آن در نقاط صفر و ۱ و ۲ به دست آورد. فرمول علی برای چندجمله‌ای P به شکل زیر است:

$$P(3) = aP(0) + bP(1) + cP(2)$$

که در آن a ، b و c سه عدد ثابت هستند. این سه عدد را پیدا کنید و مشخص کنید $a - b + c$ چند است؟

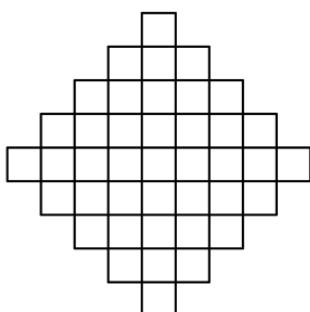
۷ (۵)

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)



- ۱۷ به چند طریق می‌توان در شکل روبرو ۸ خانه را انتخاب کرد که هیچ دو تایی از آن‌ها هم سطر و یا هم ستون نباشند؟

۲۸ (۳)

۲۰ (۲)

۱۵ (۱)

۶۴ (۵)

۳۲ (۴)

- ۱۸ حداقل چند عدد از میان اعداد $\{1, 2, \dots, 1394\}$ می‌توان انتخاب کرد که حاصل ضرب هر ۵ تا از آن‌ها مضرب باشد؟

۱۱۴ (۵)

۱۱۱ (۴)

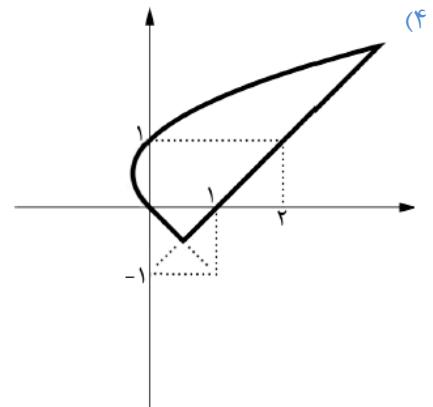
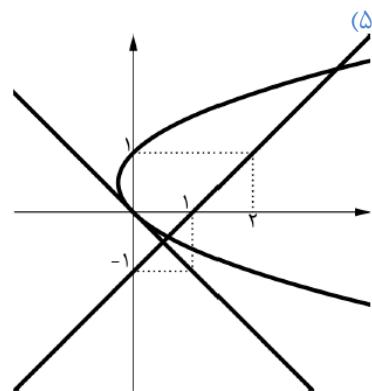
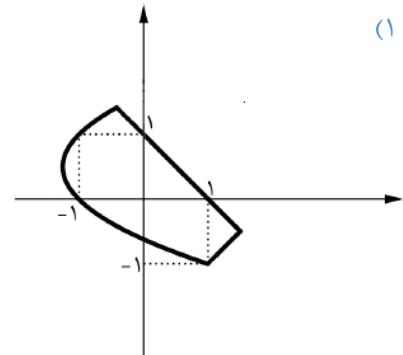
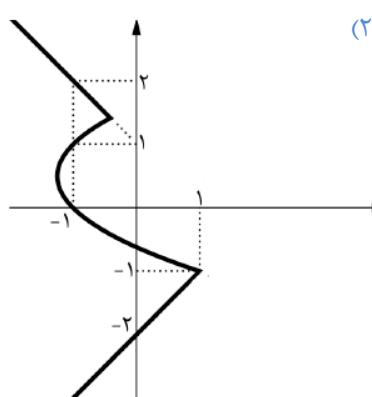
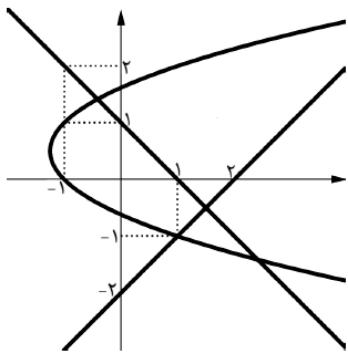
۱۰۷ (۳)

۱۰۳ (۲)

۹۹ (۱)



-۱۹ کدام گزینه مجموعه نقطه‌هایی مانند (x, y) در صفحه را با این خاصیت نمایش می‌دهد که بیشترین مقدار در بین سه عبارت $y^2 - x - y$ و $x + y - 1$ برابر یک است؟



-۲۰ در ابتدای روز اول یک ویروس مودی وارد بدن شده است. در انتهای هر روز، هر ویروس مودی که k روز عمر کرده باشد، k ویروس مودی جدید تولید می‌کند و خودش نیز به زندگی ادامه می‌دهد. در انتهای روز ششم چند ویروس مودی متولد می‌شود؟

۲۴۳ (۵)

۱۴۴ (۴)

۱۲۸ (۳)

۱۱۲ (۲)

۸۹ (۱)

-۲۱ به چند طریق می‌توان عدد 150^7 را به صورت مجموع تعدادی عدد طبیعی متوالی (بیش از یک عدد) نوشت که در آن اعداد مهم نباشند؟

۲۳۹ (۵)

۱۷۹ (۴)

۱۱۹ (۳)

۵۹ (۲)

صفر (۱)

-۲۲ به چند طریق می‌توان یک جدول 7×1 را با کاشی‌های 2×1 پر کرد، طوری که هر خانه توسط حداقل یک کاشی و حداقل دو کاشی پر شده باشد؟

۱۹ (۵)

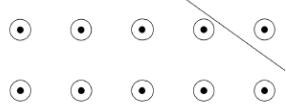
۱۸ (۴)

۱۷ (۳)

۱۶ (۲)

۱۵ (۱)

-۲۳ می‌خواهیم در تمام نقاط یک شبکه منظم 5×5 ، غیر از نقطه مرکزی، ستون‌هایی استوانه‌ای و برابر نصب کنیم، به نحوی که نقطه مرکزی از بیرون دیده نشود؛ یعنی در نقشه مسطحی که می‌بینید، هر خط گذرنده از نقطه مرکزی دست کم یکی از دایره‌ها را قطع کند. در صورتی که فاصله بین نقاط مجاور یک متر باشد، کمترین مقدار لازم برای شعاع مقطع ستون‌ها چند متر است؟



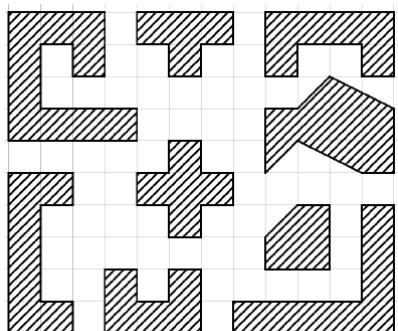
$$\sqrt{\frac{2}{5}} \quad (5)$$

$$\sqrt{\frac{4}{17}} \quad (4)$$

$$\sqrt{\frac{1}{5}} \quad (3)$$

$$\sqrt{\frac{1}{10}} \quad (2)$$

$$\sqrt{\frac{1}{13}} \quad (1)$$



-۲۴ می‌گوییم با یک چندضلعی می‌توان صفحه را کاشی کاری کرد، هرگاه بتوان نامتناهی شکل همنهشت با آن چندضلعی را در صفحه کنار هم قرارداد به گونه‌ای که کل صفحه را بپوشاند و ضمناً به جز احتمالاً در اضلاع هم پوشانی نداشته باشد. با چند تاز اشکال روبرو نمی‌توان صفحه را کاشی کاری کرد؟

۲ (۳)

۱ (۲)

۴ (۵)

۱) صفر

۳ (۴)

-۲۵ اعداد $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ و $\sqrt{7}$ را به ترتیب با A ، B و C نمایش می‌دهیم. کدام گزینه درست است؟

$C < B < A$ (۳) $B < C < A$ (۲) $A < B < C$ (۱)

$C < A < B$ (۵) $A < C < B$ (۴)

-۲۶ چند دنباله از اعداد مجموعه $\{a_1, a_2, \dots, a_{15}, 1, 2, \dots, 30\}$ داریم به گونه‌ای که برای هر $i, j \leq 15$ که $i + j \leq 15$ داشته باشیم: $a_{i+j} > a_i + a_j$

۱۵ (۵)

۹ (۴)

۴ (۳)

۱ (۲)

۱) صفر

-۲۷ حاصل ضرب اعضای مجموعه A را با $f(A)$ نشان می‌دهیم. اگر $A_1, A_2, \dots, A_{10,23}$ تمام زیرمجموعه‌های ناتهی $\{1, 2, \dots, 10, \dots, 23\}$ مجموعه باشد، باقی‌مانده

$$f(A_1) + f(A_2) + \dots + f(A_{10,23})$$

بر ۱۳ کدام است؟

۱۲ (۵)

۶ (۴)

۵ (۳)

۱ (۲)

۱) صفر

-۲۸ دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ از اعداد حقیقی برای هر $n \geq 0$ ، در رابطه‌های بازگشتی زیر صدق می‌کنند:

$$x_{n+1} = x_n + x_n y_n + y_n^2, \quad y_{n+1} = x_n - x_n y_n + y_n^2$$

اگر x_0 و y_0 اعدادی مثبت باشند و $s = x_0 + y_0$ در مورد $s = x_8 + y_8$ کدام درست است؟

 $2^{2000} \leq s$ (۵) $2^{800} \leq s < 2^{2000}$ (۴) $2^{200} \leq s < 2^{800}$ (۳) $2^{50} \leq s < 2^{200}$ (۲) $s < 2^{50}$ (۱)

-۲۹ نقطه D روی خط BC از مثلث ABC با $\angle BAC = 40^\circ$ مفروض است. از B و D به ترتیب بر BC و AB عمود می‌کنیم تا یکدیگر را در E قطع کنند. به طور مشابه از C و D به ترتیب عمودهایی بر BC و AC رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در F قطع کنند. پای عمود وارد از D بر EF را K می‌نامیم. می‌دانیم $\angle ACK$ قرار دارد و منطبق بر $\angle BAC$ نیست. زاویه $\angle ACK$ درجه است؟

کند. پای عمود وارد از D بر EF را K می‌نامیم. می‌دانیم $\angle ACK$ قرار دارد و منطبق بر $\angle BAC$ نیست. زاویه $\angle ACK$ درجه است؟

۱۴۰ (۵)

۱۰۰ (۴)

۸۰ (۳)

۶۰ (۲)

۴۰ (۱)



یک فرمول سه متغیره با متغیرهای x, y, z را «جالب» می‌گوییم، هرگاه در آن فقط از ترکیب توابع مینیمم و ماکسیمم استفاده شده باشد، مثل سه فرمول زیر:

$$\min(\max(x, y), z), \min(x, y), \max(x, \min(x, y)).$$

دو فرمول را متفاوت می‌گوییم، اگر یک مقداردهی برای متغیرهای x, y, z وجود داشته باشد که دو فرمول مقادیر مختلفی را برای آنها محاسبه کنند. مثلاً دو فرمول $\min(x, x), \max(x, \min(x, y))$ متفاوت نیستند. چند فرمول متفاوت داریم؟

(۵) بی‌نهایت

۲۵۶ (۴)

۶۴ (۳)

۱۸ (۲)

۱۱ (۱)

«پاسخ‌نامه تستی اعلامی از سوی کمیته‌ی علمی باشگاه دانش‌پژوهان جوان»

لطفاً در این کادر چیزی ننویسید.

مطابق توضیحات دفترچه تکمیل شود.
کد دفترچه

کلید زیر می‌آزرن المپیاد ریاضی

مرحله اول سال ۱۳۹۴

لولالت رقراه کد ۱



۹۴، ۱۲، ۹

غلط

صحیح

لطفاً گزینه را به صورت کامل و فقط با مداد مشکی نرم پر کنید.

۱			
۲			
۳			
۴			
۵			
۶			
۷			
۸			
۹			
۱۰			

۲۱			
۲۲			
۲۳			
۲۴			
۲۵			
۲۶			
۲۷			
۲۸			
۲۹			
۳۰			

۴۱			
۴۲			
۴۳			
۴۴			
۴۵			
۴۶			
۴۷			
۴۸			
۴۹			
۵۰			

۶۱			
۶۲			
۶۳			
۶۴			
۶۵			
۶۶			
۶۷			
۶۸			
۶۹			
۷۰			

۱۱			
۱۲			
۱۳			
۱۴			
۱۵			
۱۶			
۱۷			
۱۸			
۱۹			
۲۰			

۳۱			
۳۲			
۳۳			
۳۴			
۳۵			
۳۶			
۳۷			
۳۸			
۳۹			
۴۰			

۵۱			
۵۲			
۵۳			
۵۴			
۵۵			
۵۶			
۵۷			
۵۸			
۵۹			
۶۰			

۷۱			
۷۲			
۷۳			
۷۴			
۷۵			
۷۶			
۷۷			
۷۸			
۷۹			
۸۰			

محل امضاء

..... با کد ملی فرزند اینجاتب

مطابقت اطلاعات مندرج در پاسخ برگ را با مشخصات خود تایید می‌نمایم.